

双曲幾何入門

みやんぬ

2005年

1 Introduction

この文章はみやんぬさんの \LaTeX の勉強のために作られたものです。

また、イラストレータの練習のためにも作られました。

そして、みやんぬさんの数学の研究を少しでもわかってもらうために、

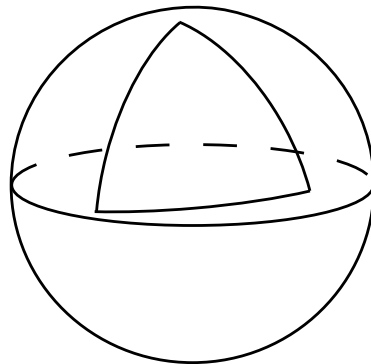
なるべく平易な言葉を用いて位相幾何学というものを解説していこうと思います。

1.1 まずは球面幾何から

双曲幾何の前に球面上の幾何学のお話をしましょう。まずは三角形のお話から。みなさんは現在まで三角形の内角の和は 180° だと教わってきたはずですが。証明はともかく、確かに平面上の三角形の内角の和は 180° であることに間違いはありません。

さて、たとえば、砂場で遊んでいるとしましょう。その砂場の地面に見た目が非常にきれいな三角形を書いたとします。理想的な環境にあるとして、完全な球体である地球に三角形を描いたこととなります。はたして、この三角形の内角の和は 180° でしょうか？

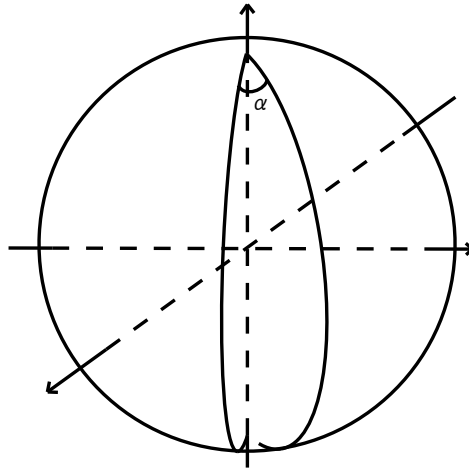
答えは否。厳密には 180° より必ず大きくなります。



球面に三角形を書くとこうなる。

ていうか、ここに絵を貼り付けるだけで時間がすごいかかった・・・。

球面に三角形を書くと、どことなくふっくらした三角形になる。この三角形の面積を求めてみよう。まずは次のことから始めよう。



二つの大円で囲まれた面積を求めてみよう。

上の図では球面に大円（中心を通る平面できった時、表面にできる線）でかこまれた領域があります。その間の角度を $\alpha (< \pi)$ とします。ここで α はラジアンではかったものとします。球面の面積は半径を 1 とするともちろん 4π です。さて、図の領域は全体の $\alpha/2\pi$ になるので、面積は $4\pi \times \alpha/2\pi = 2\alpha$ となります。

いよいよ球面三角形の面積を求めましょう。球面三角形の面積を S 、3つの角度をそれぞれ、 α 、 β 、 γ とします。この時次が成り立つことがわかります。

定理 α 、 β 、 γ を三つの角度とする球面三角形の面積は、 $S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ である。

証明

三角形を大円に沿って延長してみよう。すると下の図のようになる。球面は全ページにより、面積のわかる大円で囲まれた図形6枚で覆われる。しかし、球面三角形の部分だけは、3枚重なっているので、その部分を引くことにする。よって次の式がなりたつ。

$$2 \times 2\alpha + 2 \times 2\beta + 2 \times 2\gamma - 4S = 4\pi$$

となり、これを解くと $S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ が得られるのである。



球面三角形の面積を求める

この式は非常に簡単かつ美しいと思いませんか？球面に三角形を書くと、その角度を全部足して、 π を引けば面積が求まるなんですよ！すごいですよね。ために本当かどうか例を挙げてみましょう。

経線と緯線が直角で交わるのは知っているよね？そのことを使い球面の3角形の頂点を特殊な場所において見ましょう。まずは北極に1つと、残る2つを、赤道をちょうど4分の1に分ける場所において見ましょう。(図を見たほうが早い)すると、3角形の3つの角度がすべて 90° になる不思議な3角形ができます。(北極の角度は赤道を4分の1にしたので 90°) (注) 図をみると、3角形はゆがんで見えると思いますが、実際に地球上に立ってる人からすれば、すべての辺は直線に見えます。)さて、この面積を求めて見ましょう。

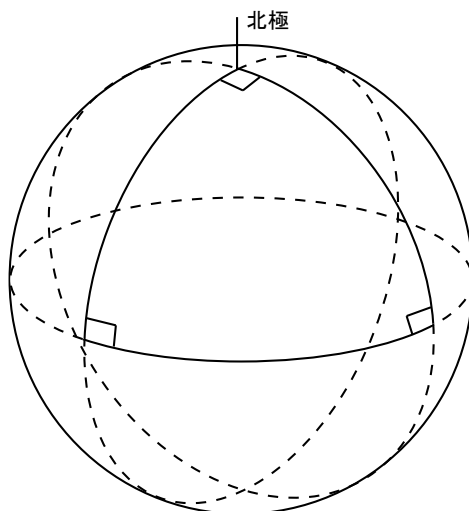
単純に小学校で習う公式からすれば、求める面積は表面積の $1/8$ なので、半径を1とすると

$$4\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}$$

さて、今さっきの公式を使ってみると、 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

となり、確かに一致することがわかる。



角度の和が 270° ！！

球面幾何学はいわゆる非ユークリッド幾何学の仲間です。いわばゆがんだ空間の上で幾何学を展開するのが目的です。球面幾何学が人間が地球上に住んでいることもありイメージしやすいですが、果たして双曲幾何というのはどういう空間のゆがみ方をしているのでしょうか。

といったところで今回は終わり。たった3ページを作るのに丸一日かかりました。とにかく絵を作るのに時間がかかり、さらに文章をきれいにしようと思えば、本を調べまくり、こんなので論文が書けるのか不安になってきますね。(ていうか論文を先に書けよ)

では続きをお楽しみに。